9/01/2017

Προταση

Εστω I διάστημα $f: I \to \mathbb{R}$ ωστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του I

α) Αν $f'(t)=0$ για κάθε t στο εσωτ. του I τοτε η f σταθερή στο I

β) Αν $f'(t)>0$ » » » » » » » » » γνησ αύξουσα στο I

γ) Αν $f'(t)<0$ » » » » » » » τοτε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I

δ) Αν $f'(t)\geq 0$ » » » » αύξουσα στο I

ε) Αν $f'(t) \leq 0$ » » » » φθίνουσα στο I

Απόδειξη.

Εστω x,y δυο σημεία του I με $x<y$

Απο το ΘΜΤ του Δ.Λ στο $[x,y]$

$\exists\, \xi \in (x,y)$ ωστε $f(y)-f(x) = f'(\xi)\,(y-x)$

Το ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I

Αν είμαστε στην περίπτωση α) $f'(\xi)=0$ άρα $f(x)=f(y)$ Συνεπώς, f σταθερή

Αν είμαστε στην περίπτωση β) $f'(\xi)>0$ άρα $f(y)-f(x)>0$ δηλ. $f(x)<f(y)$ Αρα f γνησίως αύξουσα

Αν είμαστε στην περίπτωση γ) $f'(\xi)<0$ άρα $f(y)-f(x)<0$ δηλ. $f(x)>f(y)$ Αρα f γνησίως φθίνουσα

δ), ε) όμοια

Παρατήρηση Αν f γν. αύξουσα και παραγωγίσιμη δεν έπεται οτι $f'(t)>0$ $\forall t$ εσ. σημείο του I π.χ. $f(x)=x^3$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 = x^2(5x^2+6)$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 0 \iff x = 0$

Απο την προηγουμενη προταση η f ειναι γν. αυξουσ. στο $(-\infty, 0]$
(διοτι $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$ και f συνεχής)

Επισης f είναι γνησίως αυξουσα στο $[0, +\infty)$
(διοτι f συνεχης και $f'(t) > 0 \ \forall t \in (0, +\infty)$)

Επομενως η f ειναι γνησιως αυξουσα σε ολο το $\mathbb{R}$

Πόρισμα Αν I διαστημα $f, g: I \to \mathbb{R}$ ωστε
$f'(t) = g'(t)$ για κάθε εσωτερικο σημειο του I
τοτε $\exists\, c \in \mathbb{R}$ ωστε $f(t) = g(t) = c \quad \forall t \in I$

Αποδ

$h = f - g$ Τοτε $h'(t) = 0 \quad \forall t$
εσωτ. σημειο του I άρα h σταθερή $h(t) = c \ \forall c$
τοτε $f(t) = g(t) + c \quad \forall t \in I$

Θεωρημα Εστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και f παραγωγισιμη στο εσωτ. του I

Εστω ξ εσωτ. σημειο του I ωστε $f'(\xi) > 0$

Τοτε $\exists\, \delta > 0$ ωστε $f(\xi) < f(x) \quad \forall x \in (\xi, \xi+\delta)$

και $f(x) < f(\xi) \quad \forall x\ (\xi - \delta, \xi)$

Αποδ

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Εφοσον $f'(\xi) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ωστε $\forall x \in (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$

να ισχύει $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > \dfrac{f'(\xi)}{2} > 0$

Έτσι για κάθε $x \in (\xi, \xi+\delta)$

Εφόσον $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ και $x > \xi$ προκύπτει

$f(x) - f(\xi) > 0$ δηλ. $f(x) > f(\xi)$

Επίσης για κάθε $x \in (\xi-\delta, \xi)$

Εφόσον $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ και $x-\xi < 0$ προκύπτει

$f(x) - f(\xi) < 0$ δηλ. $f(x) < f(\xi)$

Παρατήρηση

Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης δεν λέει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\xi-\delta, \xi)$ ή στο $(\xi, \xi+\delta)$
Αυτό ενδέχεται να μην ισχύει.

Παρ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Να δ.ο.

→ f παρ $f'(0) = 1$.

→ η f δεν είναι γν αύξουσα στο $(0,\delta)$ για κανένα $\delta > 0$ ούτε στο $(-\delta, 0)$ για κανένα $\delta > 0$

Θεώρημα Darboux (Θεώρημα ενδιάμεσης Τιμής για την f')

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και f παραγ. στο εσωτ. του I και $a, b \in I$

i) Αν $f'(a) < c < f'(b)$

τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = c$

ii) Αν $f'(a) > c > f'(b)$

τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ $f'(\xi) = c$

Αποδ

Ορίζουμε $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - c \cdot x$

Η g είναι συνεχής άρα από το Θεώρημα Ελάχιστης Τιμής

$\exists\, \xi \in [a,b]$ ώστε

$g(\xi) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Εφόσον $g'(a) = f'(a) - c < 0$

υπάρχει $x_1 > a$ ώστε $g(x_1) < g(a)$ άρα $\xi \neq a$

Εφόσον $g'(b) = f'(b) - c > 0$

υπάρχει $x_2 < b$ ώστε $g(x_2) < g(b)$ άρα $\xi \neq b$.

Συνεπώς $\xi \in (a,b)$ Από το Θεώρημα Fermat

συμπεραίνουμε ότι $g'(\xi) = 0$ δηλ. $f'(\xi) = c$

ii) Ομοίως.

Θεώρημα

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ x_0 εσωτ. σημείο του I f παραγωγ. στο I

$f'(x_0) = 0$

α) Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

β) Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0

Αποδ

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$ και άρα αφού $f'(x_0) = 0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0)$

α) $f''(x_0)>0$ άρα $\exists\, \delta>0$ ώστε $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$

Για καθε $x\in(x_0-\delta,x_0)$ $x-x_0<0$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

άρα $f'(x)<0$ άρα f γν. φθίνουσα στο $(x_0-\delta,x_0]$

Για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$ έχουμε $x-x_0>0$

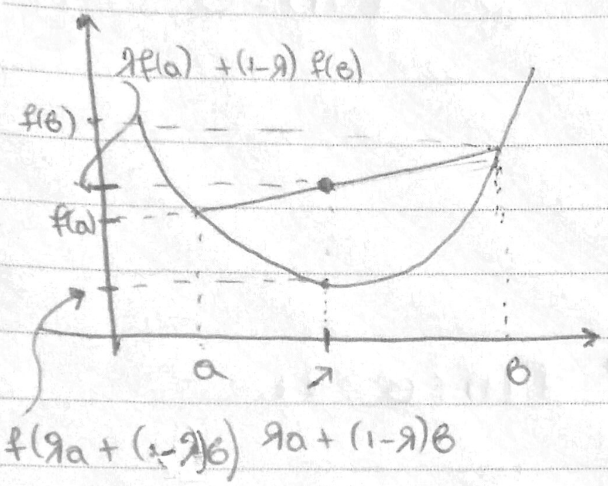
και άρα $f'(x)>0$

Συνεπώς f γν. αύξουσα στο $[x_0,x_0+\delta)$.

Επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

β) Ομοίως

Κυρτές και κοίλες



Ορισμός Μια συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$ λέγεται

α) Κυρτή αν για κάθε $a<\beta$ στο I και $0<\lambda<1$

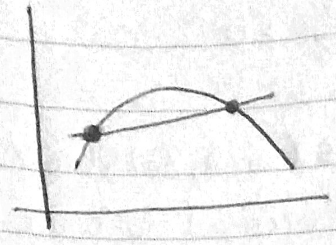
ισχύει $f(\lambda a+(1-\lambda)\beta)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(\beta)$

γνήσια κυρτή $<$

β) Κοίλη αν για κάθε $a<\beta$ στο I και $0<\lambda<1$

$f(\lambda a+(1-\lambda)\beta)\ge\lambda f(a)+(1-\lambda)f(\beta)$

γνήσια κοίλη $>$



Παρατηρήσεις

f κοίλη $\Longleftrightarrow$ $-f$ κυρτή

f γν. κοίλη $\Longleftrightarrow$ $-f$ γν. κυρτή

Θεώρημα

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ παραγ τότε f κυρτή $\Leftrightarrow$ f' αύξουσα

$\Updownarrow$

[Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη] $\longrightarrow$ $f''(t) \geq 0$

f γν. κυρτή $\Leftrightarrow$ f' γν. αύξουσα

$\Leftrightarrow$ $f''(t) > 0 \quad \forall\, t.$

β) f κοίλη $\Leftrightarrow$ f' φθίνουσα

$\Updownarrow$

[αν f δυο φορές παραγωγίσιμη] $f''(t) \leq 0 \quad \forall t$

f γν. κοίλη $\Leftrightarrow$ $f''(t) < 0 \quad \forall t.$

Ορισμός $f: I \to \mathbb{R}$ x_0 εσ. σημείο του I. Λέμε ότι το x_0 είναι σημείο καμπής της f

αν $\exists\, \delta > 0$ f κυρτή στο $(x_0-\delta, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, x_0+\delta$

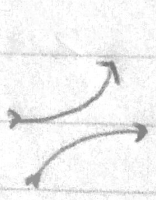
ή

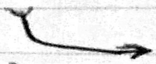
f κοίλη στο $(x_0-\delta, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, x_0+\delta$

Αν σε κάποιο διάστημα

α) $f'(t) \overset{\text{αύξουσα}}{>} 0$ $\quad f''(t) \overset{\text{κυρτή}}{>} 0$

β) $f'(t) > 0$ $\quad f''(t) \overset{\text{κοίλη}}{<} 0$



γ) $f'(t) < 0$ $f''(t) > 0$ 

δ) $f'(t) < 0$ $f''(t) < 0$